Zur Schwarzschildschen Lösung in einer einheitlichen Feldtheorie

Von G. BRAUNSS

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforschg. **19 a**, 1032—1033 [1964]; eingegangen am 5. Juni 1964)

It is shown that the system of field equations

$$\frac{1}{\varkappa} G_{mn}(\Phi) \equiv \frac{1}{\varkappa}(R_{mn} - \tfrac{1}{2} g_{mn} R) = \frac{k_0}{2}[g_{mn}(g^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} + F(\Phi)) - \Phi_{,m} \Phi_{,n}],$$

in which the g_{mn} are to be considered as functionals of the world field Φ, possesses a nonsingular static centralsymmetrical solution which, assuming $F(\Phi) \sim -\Phi^6$, is identical with the SCHWARZSCHILD-solution up to terms of higher order for large values of r.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] war von der Annahme ausgegangen worden, daß die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors, g_{mn}, Funktionale eines Weltfeldes sind. Der Einfachheit halber war zunächst ein skalares Weltfeld angenommen worden. Für die Feldgleichungen wurde der EINSTEINsche Ansatz gewählt, wobei der Energietensor so angenommen war, daß die BIANCHI-Identitäten auf eine nichtlineare KLEIN-GORDON-Gleichung für das Weltfeld führen. Diskutiert wurden Lösungen für eine statische zentralsymmetrische und eine zeitabhängige konform-ebene Metrik. Im folgenden soll noch einmal auf den statischen zentralsymmetrischen Fall eingegangen werden, um den Zusammenhang mit der SCHWARZSCHILDschen Lösung zu zeigen.

Für die Feldgleichungen wird folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varkappa} G_{mn}(\Phi) &\equiv \frac{1}{\varkappa}\left(R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R\right) \\ &= \frac{k_0}{2}[g_{mn}(g^{ab} \Phi_{,\mathrm{a}} \Phi_{,\mathrm{b}} + F(\Phi)) \\ &\qquad - \Phi_{,m} \Phi_{,n}].\end{aligned} \tag{1}$$

$\varkappa$ und k_0 sind Konstanten, die in der zitierten Arbeit [1] gleich 1 gesetzt waren; $F(\Phi)$ ist ein Funktional von Φ. Komma bezeichnet partielle Ableitung. Für eine statische zentralsymmetrische Metrik der Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\lambda(r)} \,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\Theta^2 + \sin^2 \Theta \,\mathrm{d}\varphi^2) - e^{\nu(r)} c^2 \,\mathrm{d}t^2 \tag{2}$$

ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung von Φ, λ, ν (Striche bezeichnen Ableitung nach r):

$$\Phi'' + \Phi'\left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{\lambda} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Phi} = 0, \tag{3}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \varkappa k_0 \frac{e^{-f}}{2r} \int_0^r e^f (\Phi'^2 + F) r^2 \,\mathrm{d}r,$$

$$f = \frac{1}{2} \varkappa k_0 \int_0^r \Phi'^2 r \,\mathrm{d}r, \tag{4}$$

$$\nu = -\lambda + \varkappa k_0 \int_\infty^r \Phi'^2 r \,\mathrm{d}r. \tag{5}$$

Die erste Gleichung ist die erwähnte KLEIN-GORDON-Gleichung, hier für den statischen zentralsymmetrischen Fall. In der zweiten (und damit auch dritten Gleichung) ist eine partikuläre singuläre Lösung (von $G_{mn} = 0$) für λ weggelassen, die mit der SCHWARZSCHILDschen Lösung identisch ist. Das entspricht der Forderung $\lambda \equiv \nu \equiv 0$ für $\Phi \equiv 0$. Trotzdem ist in (4) und (5) für ein gewisses $F(\Phi)$ eine Lösung enthalten, die für große r bis auf Terme, die von höherer Ordnung klein sind, mit der SCHWARZSCHILDschen Lösung übereinstimmt.

Macht man die Annahme

$$F(\Phi) = -\frac{1}{3 l_0^2} \Phi^6, \tag{6}$$

so hat die Gl. (3) für $r \gtrless l_0$ folgende asymptotische Lösung ($\Phi(0) = 1$ ohne Beschränkung d. Allg.):

$$\Phi \approx \Phi_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (r/3 l_0)^2}}, \quad r \lessgtr l_0. \tag{7}$$

Für $r \gg l_0$ gilt also

$$\Phi = \sqrt{3} \frac{l_0}{r} + O(1/r^2). \tag{8}$$

Aus den Gln. (4) und (5) folgt

$$e^{\lambda} = 1 + b/r + O(1/r^2), \quad e^{\nu} = 1 - b/r + O(1/r^2) \tag{9}$$

mit der Abkürzung

$$b = \sqrt{3} \pi \varkappa k_0 l_0/16. \tag{10}$$

[1] G. BRAUNSS, Z. Naturforschg. **19 a**, 401 [1964].

Die gesamte Energie ist gegeben durch

$$E = -4\pi \int_0^\infty T_4^4 \, \mathrm{d}r$$
$$= 2\pi k_0 \int_0^\infty (e^{-\lambda} \Phi'^2 + F) r^2 e^{\lambda/2} \, \mathrm{d}r \,. \tag{11}$$

Benutzt man die Näherungslösung (7) und setzt im Integranden ferner $\lambda = 0$, so ergibt sich angenähert

$$E \approx E_{(0)} = 2\pi k_0 \int_0^\infty (\Phi'^2 + F) r^2 \, \mathrm{d}r = \sqrt{3}\,\pi^2 k_0 l_0/4 \,. \tag{12}$$

Da die asymptotische Lösung (7) aus der Gl. (3) erhalten wird, indem man dort $\lambda = \nu = 0$ setzt, so stellt (12) die Energie des Feldes ohne Gravitationsanteil dar. Es ist nicht schwierig zu sehen, daß der genaue Wert für E sich von dem Wert $E_{(0)}$ durch einen Term unterscheidet, der von der Ordnung $\varkappa$ ist. Nimmt man an, daß die betrachtete Lösung ein Teilchen mit der Ruhemasse m_0 und der Energie $E = m_0 c^2$ repräsentiert [2], so ist zu fordern

$$E = m_0 c^2 = \sqrt{3}\,\pi^2 k_0 l_0/4 + O(\varkappa) \,. \tag{13}$$

Substituiert man dies in (10), so erhält man

$$b = \frac{\varkappa}{4\pi} m_0 c^2 + O(\varkappa^2) \,. \tag{14}$$

Nimmt man für $\varkappa$ den üblichen Ausdruck

$$\varkappa = 8\pi\gamma/c^4 \,, \tag{15}$$

wobei γ die Gravitationskonstante bezeichnet, so ergibt sich

$$b = 2\gamma m_0/c^2 + O(\varkappa^2) \,. \tag{16}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Konstanten der SCHWARZSCHILD-Lösung

$$b_{\text{Schw.}} = 2\gamma m_0/c^2 \,, \tag{17}$$

so erhält man

$$b = b_{\text{Schw.}} + O(\varkappa^2) \,. \tag{18}$$

[2] Genau genommen repräsentiert Φ das Feld einer Gesamtheit von Teilchen. Man kann sich jedoch eines der Teilchen als makrokosmisch und isoliert denken; d. h., die Integration in (11) bzw. (12) ist zwischen den Grenzen 0 und einem Wert zu nehmen, der hinreichend groß ist.

Der Term $O(\varkappa^2)$ repräsentiert offenbar die Selbstwechselwirkung der Gravitation; im Vergleich zum ersten Term, der von der Ordnung $\varkappa$ ist, kann er vernachlässigt werden.

Abschließend sei noch kurz auf die Berechnung von Bahnen mit Hilfe der angegebenen Lösung eingegangen. Mit Hilfe der Lösungen für λ und ν kann man natürlich die geodätischen Linien berechnen und sie näherungsweise als Bahnen betrachten, die von einem Objekt (Teilchen, Körper) im Felde eines anderen Objektes beschrieben werden. Eine solche Annahme ist jedoch vergleichsweise nur für $r \gg l_0$ sinnvoll, d. h. für makroskopische Objekte, da nur für solche Bereiche die starke Selbstwechselwirkung des Weltfeldes, ausgedrückt durch die Terme mit $F(\Phi)$, keinen Einfluß hat. (Es sei dabei angenommen, daß l_0 die Rolle einer fundamentalen Länge spielt, d. h. von der Größenordnung 10^{-13} cm ist.) Das läßt sich leicht einsehen, wenn man die KLEIN-GORDON-Gleichung betrachtet, die eine primäre Bedeutung hat (obwohl sie aus den Feldgleichungen abgeleitet ist). Nach Gl. (8) gilt unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$\Phi = \mathrm{const}/r \,, \quad r \gg l_0 \,. \tag{19}$$

Dasselbe Ergebnis hätte man auch aus der linearen Differentialgleichung

$$\Phi'' + \frac{2}{r}\Phi' = 0$$

erhalten, die nichts anderes als der lineare Teil der vollständigen KLEIN-GORDON-Gleichung (3) ist. Das bedeutet, daß der nichtlineare Teil den ersten Term der Lösung für Φ für hinreichend große r nicht beeinflußt. Für kleine Abstände, $r \lessapprox l_0$, ändert sich die Situation wesentlich, da in diesem Falle die starke Wechselwirkung des Feldes mit sich selbst in Erscheinung tritt. Man kann dann z. B. keine zentrale Symmetrie für Berechnung der Bewegung zweier Teilchen voraussetzen, die Lösungen lassen sich nicht mehr annähernd superponieren. Abgesehen davon wird die quantenhafte Struktur der physikalischen Größen in diesen Bereichen eine Quantelung des Feldes bedingen.